УДК 519.624, 534.1

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО КОЛЕБАНИЙ

А.М. Ахтямов, А.В. Муфтахов, А.А. Аитбаева

Аннотация

Рассматривается задача идентификации условий закрепления и нагруженности одного из концов стержня по шести собственным частотам его изгибных колебаний. На основе условий Плюккера, возникающих при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову. Найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи.

Ключевые слова: (собственные значения, обратная задача, собственные частоты, балка, сосредоточенный инерционный элемент, соотношения (условия)Плюккера)

1. Постановка обратной задачи

К некорректным задачам приводят многие задачи физики и техники [1]– [7].

При решении задач диагностики состояния технических систем в прикладных исследованиях важную роль играет определение условий закрепления элементов и деталей конструкций и механизмов. Как показано в [8, 9] проблема восстановления краевых условий, соответствующих виду закрепления, может быть сведена к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий. Эта задача не является корректной по Адамару, так как, любые числа не могут быть минорами матрицы (для того, чтобы некоторые числа были минорами матрицы, требуется выполнение так называемых условий Плюккера). В [8, 9] миноры матрицы по приближенно найденным значениям вычислялись с помощью метода наименьших квадратов (фактически предлагался метод квазирешения некорректной задачи). Недостатком этого метода является то, что он сложен в применении.

В настоящей статье предлагается другой метод решения. Он применен к нескольким задачам отыскания условий закрепления распределенных механических систем. В отличие от уже решенных задач идентификации краевых условий предлагаемый метод предоставляет не только алгоритм, но и дает явное решение задачи. Кроме того, изложение задачи проведено в общих обозначениях, годных для решения широкого круга задач.

Для удобства изложение метода будем проводить на основе задачи идентификации условий закрепления одного из концов стержня, на другом конце которого реализуется заделка.

Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [10, с. 152]:

$$EI\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + \rho\,F\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $U(x,t)$ — прогиб текущей точки оси стержня, EI — изгибная жесткость стержня, ρ — плотность стержня, F — площадь поперечного сечения стержня.

Если левый конец заделан, то краевые условия на левом конце: $U=0$, $\frac{\partial U}{\partial x}=0$ (при $x=0$).

Основные типы граничных условий на правом конце (при $x=1$) записываются в следующем виде [10, с. 153]:

1) заделка $U=0$, $\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

2) свободное опирание $U=0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$;

3) свободный конец $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$;

4) плавающая заделка $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0$, $\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

5)–9) различные виды упругого закрепления:

5) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1\,U=0$, $\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

6) $U=0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\,\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

7) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1\,U=0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$;

8) $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\,\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

9) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1\,U=0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\,\frac{\partial U}{\partial x}=0$;

10) сосредоточенный инерционный элемент на конце
$EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=-m\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-I_1\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial t^2}$.

В общем виде эти условия можно записать так:

$$\begin{array}{l} a_{11}\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+a_{15}\,U+a_{16}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \\ a_{22}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+a_{23}\,\frac{\partial U}{\partial x}+a_{24}\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial t^2}=0 \end{array} \qquad (x=1). \tag{1}$$

При $t=0$ должны выполняться начальные условия

$$U(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

Обозначим $\rho\,F\,\omega^2\,/\,(EI)$ через λ^4. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t)=y(x)\,\cos(\omega\,t)$ сводится (см., например, [11]) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)}=\lambda^4\,y, \quad U_1(y)=y(0)=0, \quad U_2(y)=y'(0)=0, \quad U_3(y)=0, \quad U_4(y)=0, \tag{2}$$

где

$$\begin{array}{l} U_3(y)=a_{11}\,y'''(1)+\left(a_{15}-a_{16}\,\lambda^4\right)\,y(1)=0, \\ U_4(y)=a_{22}\,y''(1)+\left(a_{23}-a_{24}\,\lambda^4\right)\,y'(1)=0 \end{array} \qquad (a_{11},a_{14},a_{22},a_{23}\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

— линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x=1$ [10].

Исходя из физического смысла задачи (основных типов граничных условий на правом конце, описанных выше, и того что коэффициенты жесткостей пружинок c_1 и c_2 — неотрицательны) имеем:

$$a_{11}\geq 0, \quad a_{15}\geq 0, \quad a_{16}\geq 0, \quad a_{22}\geq 0, \quad a_{23}\geq 0, \quad a_{43}\geq 0. \tag{4}$$

Поставим к этой спектральной задаче обратную: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные краевые условия $U_3(y)=0$, $U_4(y)=0$.

Что же означает найти краевые условия? На первый взгляд может показаться, что это означает, что нужно найти все коэффициенты (4). Однако это ошибочное утверждение. Дело в том, что одно и то же краевое условие может иметь совершенно разные коэффициенты. Например, условия $y'''(1)=0$ и $5\,y'''(1)=0$ имеют совершенно разные коэффициенты a_{11}. В первом случае это 1, а во втором — это 5. Однако эти коэффициенты соответствуют одному и тому же краевому условию. Поэтому нужно искать матрицу $A=||a_{ij}||$ с точностью до линейных преобразований строк, а не сами коэффициенты.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ через A:

$$A=\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{5}$$

Через M_{ij} обозначим миноры второго порядка этой матрицы, составленные из ее i-го j-го столбцов:

$$\begin{array}{l} M_{12}=a_{11}\,a_{22}, \quad M_{13}=a_{11}\,a_{23}, \quad M_{14}=-a_{11}\,a_{24}, \quad M_{15}=0, \quad M_{16}=0, \\ M_{23}=0, \quad M_{24}=0, \quad M_{25}=-a_{15}\,a_{22}, \quad M_{26}=a_{16}\,a_{22}, \\ M_{34}=0, \quad M_{35}=-a_{15}\,a_{23}, \quad M_{36}=0, \\ M_{45}=0, \quad M_{46}=-a_{16}\,a_{24}, \qquad M_{56}=0. \end{array} \tag{6}$$

Для основных типов граничных условий на правом конце (при $x=1$), выписанных выше, укажем какие из миноров матрицы A заведомо отличны от нуля:

1) заделка $y(1)=0,\ \ y'(1)=0$: $M_{35}\neq 0$;
2) свободное опирание $y(1)=0,\ \ y''(1)=0$: $M_{25}\neq 0$;
3) свободный конец $y'''(1)=0,\ y''(1)=0$: $M_{12}\neq 0$;
4) плавающая заделка $y'''(1)=0,\ y'(1)=0$: $M_{13}\neq 0$;
5)–9) различные виды упругого закрепления:
5) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ \ y'(1)=0$: $M_{13}\neq 0,\ (M_{35}\neq 0)$;
6) $y(1)=0,\ \ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{25}\neq 0,\ (M_{35}\neq 0)$;
7) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ \ y''(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ (M_{25}\neq 0)$;
8) $y'''(1)=0,\ \ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ (M_{13}\neq 0)$;
9) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ (M_{35}\neq 0,\ \ M_{25}\neq 0,\ M_{13}\neq 0)$;
10) сосредоточенный инерционный элемент на конце
$y'''(1)-a_{16}\,\lambda^4\,y(1)=0,\ \ y''(1)-a_{24}\,\lambda^4\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ (M_{46}\neq 0,\ \ M_{25}\neq 0,\ M_{13}\neq 0)$.

В терминах матрицы A отыскание форм $U_3(y)$, $U_4(y)$ равносильно нахождению матрицы A с точностью до линейных преобразований ее строк.

Поэтому поставленная выше обратная задача восстановления краевых условий может быть может быть сформулирована следующим образом: *коэффициенты a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ задачи (2) — неизвестны; ранг матрицы (5) равен двум; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (2); требуется восстановить матрицу (5) с точностью до линейных преобразований строк.*

Покажем, что эта задача может быть переформулирована в терминах характеристического определителя.

Функции

$$\begin{array}{l} y_1(x,\,\lambda)=\big(\cos\lambda\,x+\mathrm{ch}\lambda\,x\big)/2,\ y_2(x,\,\lambda)=\big(\sin\lambda\,x+\mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda) \\ y_3(x,\,\lambda)=\big(-\cos\lambda\,x+\mathrm{ch}\lambda\,x\big)/(2\lambda^2),\ y_4(x,\,\lambda)=\big(-\sin\lambda\,x+\mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda^3) \end{array} \tag{7}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda)=\lambda^4\,y(x,\lambda), \tag{8}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \qquad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \tag{9}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\,\lambda)$ $(j = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [10]).

Общее решение уравнения (8) представляется в следующем виде

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1\, y_1(x,\lambda) + C_2\, y_2(x,\lambda) + C_3\, y_3(x,\lambda) + C_4\, y_4(x,\lambda).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия из (2):

$$\begin{gathered} U_i(y) = U_i(C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_1 + C_4\, y_2) = \\ = C_1\, U_i(y_1) + C_2\, U_i(y_2) + C_3\, U_i(y_1) + C_4\, U_i(y_2) = 0, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \end{gathered} \tag{10}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (2) получают из условия существования ненулевого решения C_i из системы (10). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \tag{11}$$

соответствующей системы. Этот определитель называют *характеристическим определителем спектральной задачи* (2). Его нули совпадают с собственными значениями задачи (2) [12]. Учитывая условия (9), из (11) получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Отсюда и из (3) имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\, y_3'''(1) + \left(a_{15} - a_{16}\,\lambda^4\right)\, y_3(1) & a_{11}\, y_4'''(1) + \left(a_{15} - a_{16}\,\lambda^4\right)\, y_4(1) \\ a_{22}\, y_3''(1) + \left(a_{23} - a_{24}\,\lambda^4\right)\, y_3'(1) & a_{22}\, y_4''(1) + \left(a_{23} - a_{24}\,\lambda^4\right)\, y_4'(1) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Применяя теорему Лапласа для вычисления определителей, получаем

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) \equiv M_{12}\, f_{12}(\lambda) + M_{13}\, f_{13}(\lambda) + M_{14}\, f_{14}(\lambda) + M_{25}\, f_{25}(\lambda) + \\ + M_{26}\, f_{26}(\lambda) + M_{35}\, f_{35}(\lambda) + M_{46}\, f_{46}(\lambda), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} & f_{12}(\lambda) = -\tfrac{1}{2}\,(1 + \cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)\,; \\ & f_{13}(\lambda) = -\tfrac{1}{2\,\lambda}\,(\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda)\,; \quad f_{14}(\lambda) = \lambda^4\, f_{13}(\lambda); \\ & f_{25}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,\lambda^3}\,(\cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda - \sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)\,; \quad f_{26}(\lambda) = \lambda^4\, f_{25}(\lambda); \\ & f_{35}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,\lambda^4}\,(\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - 1)\,; \quad f_{46}(\lambda) = \lambda^8\, f_{35}(\lambda), \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции (14) можно сформулировать следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; известны ненулевые корни λ_k характеристического определителя (14). Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

2. Формулы нахождения миноров M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{25}, M_{26}, M_{35}, M_{46}.

Прежде чем найти матрицу A, нужно найти сначала ее миноры, а значит и числа

$$M_{12}, \quad M_{13}, \quad M_{14}, \quad M_{25}, \quad M_{26}, \quad M_{35}, \quad M_{46}, \tag{16}$$

входящие в разложение (14).

Пусть λ_k, $k = 1, 2 \ldots, 6$ являются собственными значениями соответствующей уравнению (14) краевой задачи. Тогда λ_k, $k = 1, 2 \ldots, 6$ — корни уравнения (14) [12]. Подставив эти значения в уравнение (14), получим систему 6 уравнений для отыскания 7 неизвестных (16) матрицы A:

$$\begin{gathered} M_{12}\, f_{12}^k + M_{13}\, f_{13}^k + M_{14}\, f_{14}^k + M_{25}\, f_{25}^k + M_{26}\, f_{26}^k + \\ +M_{35}\, f_{35}^k + M_{46}\, f_{46}^k = 0, \qquad k = 1, 2 \ldots, 7, \end{gathered} \tag{17}$$

где через f_{ij}^k обозначены значения функций $f_{ij}(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$.

Заметим, что уравнения (17) являются уравнениями гиперплоскостей в 7-мерном пространстве $\mathbb{R}^7$. Если матрица

$$F = \left\| \begin{matrix} f_{12}^1 & f_{13}^1 & f_{14}^1 & f_{25}^1 & f_{26}^1 & f_{35}^1 & f_{46}^1 \\ f_{12}^2 & f_{13}^2 & f_{14}^2 & f_{25}^2 & f_{26}^2 & f_{35}^2 & f_{46}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{12}^6 & f_{13}^6 & f_{14}^6 & f_{25}^6 & f_{26}^6 & f_{35}^6 & f_{46}^6 \end{matrix} \right\| \tag{18}$$

системы уравнений (17) имеет ранг 6, то система уравнений (17) определяет прямую в 7-мерном пространстве, проходящую через начало координат. Известно, что направляющий вектор данной прямой, можно найти по формуле:

$$\mathbf{a} = (F_{12}, -F_{13}, F_{14}, -F_{25}, F_{26}, -F_{35}, -F_{46}),$$

где F_{ij} — минор матрицы F, получаемый вычеркиванием столбца с элементами f_{ij}^k $(k = 1, 2, 3)$. Поэтому эту прямую можно определить следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{matrix} M_{12} = F_{12}\, t, & M_{13} = -F_{13}\, t, & M_{14} = F_{14}\, t, & M_{25} = -F_{25}\, t, \\ M_{26} = F_{26}\, t, & M_{35} = -F_{35}\, t, & M_{46} = -F_{46}\, t, & t \in \mathbb{R}. \end{matrix} \tag{19}$$

3. Корректность по А.Н. Тихонову поставленной задачи.

Покажем, что задача отыскания 7 неизвестных (16) является корректной по А.Н. Тихонову.

Система (17) имеет бесчисленное множество решений, поэтому требуется как-то факторизовать множество решений, т.е. ввести множество корректности M.

Для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$ называется *корректной по А.Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [2–4]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (17) и переводящее набор 7 значений (16) в 6 значений λ_k $(k = 1, 2, \dots, 6)$.

Чтобы выделить множество корректности введем норму

$$\|\cdot\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{14}|, |M_{25}|, |M_{26}|, |M_{35}|, |M_{46}|)). \tag{20}$$

Будем называть *множеством корректности* M такой набор миноров $v = (|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{14}|, |M_{25}|, |M_{26}|, |M_{35}|, |M_{46}|)$, для которого выполнены три условия:

1) условие принадлежности v единичной сфере:

$$\|v\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{14}|, |M_{25}|, |M_{26}|, |M_{35}|, |M_{46}|) = 1. \tag{21}$$

2) $M_{12} \geq 0,\ M_{13} \geq 0,\ M_{14} \leq 0,\ M_{25} \leq 0,\ M_{26} \geq 0,\ M_{35} \leq 0,\ M_{46} \leq 0$.

Условие 1) обеспечивает математическое существование двух решений (две точки пересечения прямой (19) и сферы (21)). Условие 2) следует из физического смысла коэффициентов a_{ij}. Оно выполняется априори и дает выбор одного из этих двух математических решений (одной из двух точек пересечения). (С математической точки зрения выбор знаков $\leq$ или $\geq$ не принципиален; он позволяет выбрать одно из двух решений, получающихся в пересечении прямой (19) и сферы, (21)).

Из определения вытекает, что M является компактом.

Пусть V — это пространство $\mathbb{R}^7$ элементов $v = (v_1, v_2, \dots, v_7)$ с нормой $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, \dots, |v_7|)$; Z — это пространство $\mathbb{R}^6$ элементов $z = (z_1, z_2, \dots, z_6)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_6|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Тогда задача $Rv = z$ будет *корректной по А.Н. Тихонову*, так как все три условия определения корректности по по А.Н. Тихонову выполнены: Априори известно, что решение задачи идентификации набора 7 значений (16) по собственным частотам существует (так как именно с помощью уравнения (17) описываются собственные частоты реальной идентифицируемой механической системы). Компактность множества M и единственность решения на нем показана выше. Таким образом, первые два условия определения выполнены. Третье условие вытекает из аналитичности $f_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

В работе описано как по минорам максимального порядка матрицы A находить саму матрицу A с точностью до линейных преобразований строк. Известно, что миноры матрицы A должны быть связаны между собой так называемыми условиями Плюккера.

4. Условия Плюккера.

Условия Плюккера возникают при отыскании рангового подпространства по своему направляющему бивектору (см. [13]). Их можно также интерпретировать в терминах проективной геометрии, как условия, возникающие при отыскании проективной прямой по координатам Плюккера (см. [14,15]), а также в терминах грассмановой алгебры как плюккеровы условия простоты грассманового агрегата [16]. Однако нам представляется более правильным не прибегать к дополнительной терминологии. В настоящей статье предлагается другой подход к условиям Плюккера, как к условиям возникающим при восстановлении (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы по ее минорам максимального порядка. При этом, новым является запись искомой матрицы непосредственно с помощью миноров, а не через систему уравнений, как это делается обычно. Такой подход делает условие Плюккера более наглядным и позволяет предъявить явное решение задачи отыскания краевых условий.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank} A = 2$. *Чтобы матрицу*

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccccc} \widetilde{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a}_{15} & -\widetilde{a}_{16} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & -\widetilde{a}_{24} & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

можно было получить из матрицы (5) с помощью линейного преобразования строк необходимо и достаточно, чтобы наборы миноров второго порядка этих матриц совпадали с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов.

Доказательство. Необходимость. Итак, пусть матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк. То есть существует невырожденная матрица S размера 2×2 такая, что $\widetilde{A} = S \cdot A$, где $\det S = k \neq 0$. Тогда для всех подматриц $\widetilde{A}_{i_1 i_2}$ и $A_{i_1 i_2}$ размера 2×2 матриц $\widetilde{A}$ и A верно: $\widetilde{A}_{i_1 i_2} = S \cdot A_{i_1 i_2}$, где $1 \leq i_1 < i_2 \leq 6$. А значит $\widetilde{M}_{i_1 i_2} = \det \widetilde{A}_{i_1 i_2} = \det (S \cdot A_{i_1 i_2}) = \det S \cdot \det A_{i_1 i_2} = k \cdot M_{i_1 i_2}$. Что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A, а $(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$ — набор строк матрицы $\widetilde{A}$. Не трудно видеть, что для того чтобы матрицу $\widetilde{A}$ можно было получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{Span}(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим следующую матрицу размера 3×6:

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \right\| \tag{22}$$

Ранг этой матрицы равен 2. Без ограничения общности будем считать, что $M_{12} \neq 0$. Тогда все окаймляющие M_{12} миноры 3-го порядка равны нулю:

$$\begin{array}{ll} -M_{13}\, x_2 + M_{12}\, x_3 = 0, & -M_{14}\, x_2 + M_{12}\, x_4 = 0, \\ M_{25}\, x_1 + M_{12}\, x_5 = 0, & M_{26}\, x_1 + M_{12}\, x_6 = 0. \end{array} \tag{23}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = (M_{12}, 0, 0, 0, -M_{25}, -M_{26})$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{12}, M_{13}, M_{14}, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} M_{12} & 0 & 0 & 0 & -M_{25} & -M_{26} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Проделаем тоже самое с матрицей $\widetilde{A}$. Так как наборы миноров максимального порядка этих матриц совпадают с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов, то соответствующие системы линейных однородных уравнений эквивалентны, а значит $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{Span}(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$.

Отсюда следует, что матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк. Что и требовалось доказать.

Заметим, что, решая систему (23), можно восстановить матрицу A по ее минорам второго порядка, с точностью до линейного преобразования строк. $\square$

Теорема 2. ***(условия Плюккера).*** *Для того чтобы набор чисел*

$$\begin{array}{c} M_{12}, \quad M_{13}, \quad M_{14}, \quad M_{15} = 0, \quad M_{16} = 0, \quad M_{23} = 0, \quad M_{24} = 0, \\ M_{25}, \quad M_{26}, \quad M_{34} = 0, \quad M_{35}, \quad M_{46}, \quad M_{56} = 0. \end{array} \tag{24}$$

являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$M_{12}\,M_{35} - M_{25}\,M_{13} = 0, \tag{25}$$

$$M_{12}\,M_{46} - M_{26}\,M_{14} = 0, \tag{26}$$

$$M_{13}\,M_{25} - M_{12}\,M_{35} = 0, \tag{27}$$

$$M_{13}\,M_{26} = 0, \tag{28}$$

$$M_{14}\,M_{25} = 0, \tag{29}$$

$$M_{14}\,M_{35} = 0, \tag{30}$$

$$M_{13}\,M_{46} = 0, \tag{31}$$

$$M_{26}\,M_{35} = 0, \tag{32}$$

$$M_{25}\,M_{46} = 0, \tag{33}$$

называемые условиями Плюккера.

Доказательство. 1) Пусть $M_{12} \neq 0$. При доказательстве теоремы 1 было показано, что если $M_{12} \neq 0$, то

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -M_{25}/M_{12} & -M_{26}/M_{12} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{34}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{35}, M_{46}. Их можно вычислить:

$$M_{35} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{M_{25}}{M_{12}} \\ M_{13} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{25}\,M_{13}}{M_{12}}; \quad M_{46} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{M_{26}}{M_{12}} \\ M_{14} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{26}\,M_{14}}{M_{12}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13}, \quad M_{12}\,M_{46} \neq M_{26}\,M_{14}, \quad M_{13}\,M_{26} \neq 0, \quad M_{14}\,M_{25} \neq 0,$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{12} \neq 0$ и числа (24) являются набором миноров матрицы (5) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (25), (26), (28), (29) . Верно и обратное, если если $M_{12} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (25), (26), (28), (29), то числа (24) являются набором миноров матрицы (5) ранга 2. Условие $M_{12} \neq 0$ не является существенным. аналогичные теоремы можно получить, когда отличен от нуля другой минор второго порядка матрицы A.

2) Пусть $M_{13} \neq 0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{13} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$-M_{13}\,x_2 + M_{12}\,x_3 = 0, \quad -M_{14}\,x_3 + M_{13}\,x_4 = 0, \quad M_{35}\,x_1 + M_{13}\,x_5 = 0. \tag{35}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(1, 0, 0, 0, -\frac{M_{35}}{M_{13}}, 0\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{12}, M_{13}, M_{14}, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M_{35}}{M_{13}} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{25}, M_{26}, M_{46}. Их можно вычислить:

$$M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{M_{35}}{M_{13}} \\ M_{12} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{12}\,M_{35}}{M_{13}}; \quad M_{26} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ M_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{46} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ M_{14} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Как видим, если

$$M_{13}\,M_{25} \neq M_{12}\,M_{35}, \quad M_{14}\,M_{35} \neq 0,$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{13} \neq 0$ и числа (24) являются набором миноров матрицы (5) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (27), (30). Верно и обратное, если если $M_{12} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (27), (30) являются набором миноров матрицы (5) ранга 2.

3) Пусть $M_{14} \neq 0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{14} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$M_{12}\,x_4 - M_{14}\,x_2 = 0, \quad M_{13}\,x_4 - M_{14}\,x_3 = 0, \quad -M_{14}\,x_6 - M_{46}\,x_1 = 0. \tag{36}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(1, 0, 0, 0, 0, \frac{M_{46}}{M_{14}}\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, -M_{12}, -M_{13}, M_{14}, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_{46}}{M_{14}} \\ 0 & -M_{12} & -M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В записи матрицы A не используются миноры M_{25}, M_{26}, M_{35}. Их можно вычислить:

$$M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -M_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{26} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{M_{46}}{M_{14}} \\ -M_{12} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{12}\,M_{46}}{M_{14}};$$

$$M_{35} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -M_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы набор чисел (24), где $M_{14} \neq 0$, являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (26), (31).

4)Пусть $M_{25} \neq 0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{25} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$M_{12}\,x_5 + M_{25}\,x_1 = 0, \quad M_{35}\,x_2 - M_{25}\,x_3 = 0, \quad -M_{26}\,x_5 - M_{25}\,x_6 = 0. \tag{37}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{M_{12}}{M_{25}}, 0, 0, 0, -1, -\frac{M_{26}}{M_{25}}\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{25}, M_{35}, 0, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{M_{12}}{M_{25}}, & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{M_{26}}{M_{25}} \\ 0 & M_{25} & M_{35} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В записи матрицы A не используются миноры M_{13}, M_{14}, M_{46}. Их можно вычислить:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} \frac{M_{12}}{M_{25}} & 0 \\ 0 & M_{35} \end{vmatrix} = \frac{M_{12}\,M_{35}}{M_{25}}; \quad M_{14} = \begin{vmatrix} \frac{M_{12}}{M_{25}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{46} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{M_{26}}{M_{25}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы набор чисел (24), где $M_{25} \neq 0$, являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (27), (32).

5)Пусть $M_{26} \neq 0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{26} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$M_{12}\,x_6 + M_{26}\,x_1 = 0, \quad M_{46}\,x_2 - M_{26}\,x_4 = 0, \quad -M_{26}\,x_5 - M_{25}\,x_6 = 0. \tag{38}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{M_{12}}{M_{26}}, 0, 0, 0, \frac{M_{25}}{M_{26}}, -1\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{26}, 0, M_{46}, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{matrix} \frac{M_{12}}{M_{26}}, & 0 & 0 & 0 & \frac{M_{25}}{M_{26}} & -1 \\ 0 & M_{26} & 0 & M_{46} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

В записи матрицы A не используются миноры M_{13}, M_{14}, M_{35}. Их можно вычислить:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} \frac{M_{12}}{M_{26}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{14} = \begin{vmatrix} \frac{M_{12}}{M_{26}} & 0 \\ 0 & M_{46} \end{vmatrix} = \frac{M_{12}\,M_{46}}{M_{26}};$$

$$M_{35} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{M_{25}}{M_{26}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы набор чисел (24), где $M_{26} \neq 0$, являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (26), (33).

6) Пусть теперь $M_{35} \neq 0$. Пусть $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{35} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$M_{35}\,x_1 + M_{13}\,x_5 = 0, \quad M_{35}\,x_2 - M_{25}\,x_3 = 0. \tag{39}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{M_{13}}{M_{35}}, 0, 0, 0, 1, 0\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{25}, M_{35}, 0, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{matrix} -\frac{M_{13}}{M_{35}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -M_{25} & -M_{35} & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{12}, M_{14}, M_{26}, M_{46}. Их можно вычислить:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -\frac{M_{13}}{M_{35}} & 0 \\ 0 & -M_{25} \end{vmatrix} = \frac{M_{25}\,M_{13}}{M_{35}}; \quad M_{14} = \begin{vmatrix} -\frac{M_{13}}{M_{35}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{26} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -M_{25} & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{46} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

Следовательно, для того чтобы набор чисел (24), где $M_{35} \neq 0$, являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (27).

7) Пусть $M_{46} \neq 0$. Пусть $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A. Найдем условие при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу (22) размера 3×6. Ранг этой матрицы равен 2. Поэтому все окаймляющие M_{46} миноры 3-го порядка матрицы (22) равны нулю:

$$M_{46}\, x_1 + M_{14}\, x_6 = 0, \quad M_{46}\, x_2 - M_{26}\, x_4 = 0. \tag{40}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{M_{14}}{M_{46}}, 0, 0, 0, 0, -1\right)$ и $\mathbf{x}_2 = (0, M_{26}, 0, M_{46}, 0, 0)$, по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{matrix} \frac{M_{14}}{M_{46}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & M_{26} & 0 & M_{46} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{12}, M_{13}, M_{25}, M_{35}. Их можно вычислить:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{46}} & 0 \\ 0 & M_{26} \end{vmatrix} = \frac{M_{14}\, M_{26}}{M_{46}}; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{46}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ M_{26} & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{35} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы набор чисел (24), где $M_{35} \neq 0$, являлся набором миноров матрицы (5) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (26).

□

5. Метод идентификации матрицы A.

1) Пусть λ_k, $k = 1, 2 \ldots, 6$ являются точными собственными значениями краевой задачи (2), (3). Априори известно, что искомая матрица A существует, все F_{ij} найдены точно и $F_{12} \neq 0$, то $M_{12} \neq 0$, условия Плюккера (25) – (33) выполнены, а сама матрица A имеет вид (34). Если дополнительно известно, что F_{12} является наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F, то из (25) получаем, что M_{12} является наибольшим по модулю минором матрицы A, а сама матрица A с точностью до линейных преобразований строк может быть записана следующим образом:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{25}}{F_{12}} & -\frac{F_{26}}{F_{12}} \\ 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

или

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{25}}{F_{12}} & -\frac{F_{26}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & F_{13}/F_{12} & F_{14}/F_{12} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{41}$$

Запись матрицы A в виде (41) удобна тем, что набор миноров матрицы (41) лежит в множестве корректности M (минор $M_{12} = 1$, остальные миноры не больше единицы).

Все условия корректности по А.Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_4, \widetilde{\lambda}_5, \lambda_6) \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{R}^6} < \delta$ выполнено неравенство

$$\|(M_{12}, M_{13}, M_{14} M_{25}, M_{26}, M_{35}, M_{46}) - (\widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{13}, \widetilde{M}_{14}, \widetilde{M}_{25}, \widetilde{M}_{26}, \widetilde{M}_{35}, \widetilde{M}_{46}\|_{\mathbb{R}^6} < \varepsilon.$$

Последнее вытекает из аналитичности функций $f_{ij}(\lambda)$ и $F_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Аналогично выписываются явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы A.

Если числа λ_1, λ_2, ..., λ_6, а значит, и F_{ij} даны приближенно, то условия (25)–(33) могут не выполняться и поэтому формально по минорам F_{ij} матрицу A построить невозможно. Однако в записи (41) для матрицы A не используется миноры F_{35} и F_{46} , поэтому их значения нам фактически не нужны. Если F_{12} является наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F, то матрицу (41) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы A. Причем, как следует из вышеизложенного, чем ближе числа λ_1, λ_2,..., λ_6 к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы A.

Аналогично выписываются явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы A.

Так, если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{13}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{35}}{F_{13}} & 0 \\ 0 & F_{12}/F_{13} & 1 & F_{14}/F_{13} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{42}$$

Если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{14}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{46}}{F_{14}} \\ 0 & -F_{12}/F_{14} & -F_{13}/F_{14} & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{43}$$

Если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{25}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} \frac{F_{12}}{F_{25}}, & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{F_{26}}{F_{25}} \\ 0 & 1 & F_{35}/F_{25} & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{44}$$

Если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{26}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} \frac{F_{12}}{F_{26}}, & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{25}}{F_{26}} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & F_{46}/F_{26} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{45}$$

Если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{26}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} -\frac{F_{13}}{F_{35}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & F_{25}/F_{35} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{46}$$

Если наибольшим по модулю минором шестого порядка матрицы F является минор F_{46}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} \frac{F_{14}}{F_{46}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & F_{26}/F_{46} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{47}$$

Таким образом, верна следующая

Теорема 3. *Если* λ_k, $k = 1, 2 \ldots, 6$ *являются собственными значениями краевой задачи (2), (3),* $\operatorname{rank} F = 6$, *то задача отыскания матрицы* A *по собственным значениям* λ_k, $k = 1, 2 \ldots, 6$ *является корректной по А.Н. Тихонову, где множеством корректности решения этой задачи является компакт* M, *определенный выше. Решение задачи представляет собой одну из матриц (41)–(47) в зависимости от того, какой из миноров* F_{ij} *матрицы* F *является наибольшим по модулю.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-97010-р_поволжье_а, 14-01-97013-р_поволжье_а), Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 2217/ГФ3).

Summary

A.M. Akhtyamov, A.V. Muftahov, A.A. Aitbaeva. On the uniqueness of loading fixing one end of the rod on the natural frequencies of oscillationm. The problem of identification of beam boundary conditions at one end from the six natural frequency is concidered. The well-posedness set is constructed by Plucker's conditions, arising at restoration matrixes from its minors the maximal order. A.N.Tikhonov well-posedness is proved. The explicit solution of the identification problem of boundary conditions matrix is found. It is written out in terms of the characteristic determinant of the corresponding spectral problem.

Key words: (eigenvalues, the inverse problem, the natural frequencies, beam, concentrated inertial element,Plucker's conditions)

Литература

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1974.–224 с.
2. *Иванов В.К.,Васин В.В., Танана В.П* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. –М.: Наука, 1978. –200 с.
3. *Лаврентьев М. М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. –М.: Наука, 1980.–288 с.
4. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1990. –232 с.
5. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. –М.: Наука, 1995.
6. *Лаврентьев М. М., Резницкая К.Х., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. –Новосибирск: Наука, 1982.
7. *Лаврентьев М. М.* Теория операторов и некорректные задачи. –Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
8. *Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. –2004. Vol 12. –№ 4. P. 393–408.
9. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009.–272 с.
10. *Вибрации в технике*: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. –М.: Машиностроение, 1978. –352 с.
11. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). –М.: Наука, 1968. –503 с.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. –М.: Наука, 1969. –526 с.

13. *Постников М. М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. –М.: Наука, 1979. –312 с.

14. *Мамфорд Д. Б.* Алгебраическая геометрия. 1. Комплексные многообразия. –М.: Мир, 1979.

15. *Hodge W. V. D., Pedoe D.* Methods of Algebraic Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. viii+440 p.

16. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. –М.: Гостехиздат, 1956. –443 с.

17. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравненимм математической физики. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. –576 с.

18. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. –Киев: Наукова думка, 1964. –288 с.

19. *Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф.* Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. –2008. Т. 49. –№ 1. С. 139–147.

20. *Ахтямов А. М.* Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. –2003. –№ 6. С. 137–147.

Ахтямов Азамат Мухтарович– д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет.

E-mail: *akhtyamovam@mail.ru*

Муфтахов Артур Вильевич– доктор Ph.D., лектор, SHAMOON COLLEGE OF ENGINEERING, Ashdod, Israel.

Аитбаева Айгуль Азаматовна – аспирант, Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН

E-mail: *phunakoshi@mail.ru*